

CORRIGÉ DU PARTIEL DU 28/10/2019**Questions de cours (5 points)**

1. Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est gaussien si toute combinaison linéaire finie de ses coordonnées est une variable aléatoire gaussienne. Autrement dit, si la variable

$$\lambda_1 X_{t_1} + \cdots + \lambda_n X_{t_n}$$

est gaussienne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, et tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$.

2. Pour $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\alpha \star \beta)_k| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \beta_{k-n} \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n \beta_{k-n}| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{k-n}| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_k|, \end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé la définition de $\star$, l'inégalité triangulaire, le théorème de Fubini (cas positif), et le changement d'indice bijectif $k \mapsto k - n$.

3. Remarquons tout d'abord que le processus Z est bien du second ordre en tant que somme de deux processus du second ordre (L^2 est un espace vectoriel). De plus, par linéarité de l'espérance, on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_Z(t) = \mu_X(t) + \mu_Y(t),$$

et le membre de droite ne dépend pas de t par stationnarité de X et Y . D'autre part, par bilinéarité de la covariance, on a pour tout $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_Z(t, t+h) = \gamma_X(t, t+h) + \gamma_Y(t, t+h) + \text{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \text{Cov}(X_{t+h}, Y_t).$$

La stationnarité de X et Y assure que les deux premiers termes à droite ne dépendent pas de t . Si de plus X et Y sont décorrélés, alors les deux derniers termes disparaissent et l'on peut tranquillement conclure que Z est stationnaire.

Exercice (5 points)

1. La définition $X_t := Z_t + \frac{3}{2}Z_{t-1} - Z_{t-2}$ se réécrit $X = F_\alpha(Z)$ avec

$$\alpha_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 3/2 & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$, le filtre est causal. La représentation en série est

$$P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k = 1 + \frac{3}{2}z - z^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)(1 + 2z).$$

2. Puisque Z est un bruit blanc standard, le théorème de filtrage assure que $X = F_\alpha(Z)$ est du second ordre, stationnaire et de moyenne et auto-covariance

$$\mu_X = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_X(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \begin{cases} 17/4 & \text{si } h = 0 \\ -1 & \text{si } h \in \{-2, 2\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. L'équation $F_\beta(F_\alpha(Z)) = Z$ équivaut à $\beta \star \alpha = e$. Il s'agit donc de déterminer l'inverse de α , s'il existe. D'après la question 1, P_α n'a pas de racines de module 1, donc le théorème d'inversion des filtres polynomiaux garantit l'existence d'un inverse $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$, donné par les coefficients du développement en série de puissances de $1/P_\alpha(z)$. Pour les calculer, on réduit $1/P_\alpha(z)$ en éléments simples :

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)(1 + 2z)} = \frac{a}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{b}{1 + 2z}.$$

En identifiant, on trouve $a + b = 1$ et $2a = b/2$, c'est-à-dire $(a, b) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$. Ensuite, on développe les éléments simples en séries de puissances sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + 2z} = \frac{1}{2z} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2z}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^k.$$

En combinant tout cela, on obtient

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^k.$$

Par injectivité de la représentation en série de puissances, on conclut que

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{5 \cdot 2^k} & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{-(-2)^{k+2}}{5} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Problème (10 points)

1. L'inégalité de Cauchy-Schwartz assure que pour des v.a.r. $Y, Z \in L^2$,

$$|\mathbb{E}[YZ]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2]}.$$

Le résultat cherché s'obtient en prenant $Y = X_0 - \mathbb{E}[X_0]$ et $Z = X_h - \mathbb{E}[X_h]$. En particulier, si γ est une fonction d'auto-covariance, alors on doit avoir $|\rho| \leq 1$.

2. On se donne deux v.a.r. $A, B \in L^2$ centrées, réduites et décorréelées, et on pose

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t := A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t).$$

Alors le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien de carré intégrable, de moyenne nulle, et

$$\gamma_X(t, t+h) = \cos(\theta t) \cos(\theta t + \theta h) + \sin(\theta t) \sin(\theta t + \theta h) = \cos(\theta h).$$

3. Le théorème de filtrage garantit l'existence du processus stationnaire $Y = F_\alpha(Z)$ dès que le filtre $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Ici on veut prendre

$$\alpha_k := \begin{cases} \rho^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

La suite α ainsi définie est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\rho| < 1$. Dans ce cas, on a

$$\gamma_Y(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+|h|} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k+|h|} = \frac{\rho^{|h|}}{1 - \rho^2}.$$

4. Pour $t \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{E}[W_t^2] = \mathbb{E}[X_t^2]\mathbb{E}[Y_t^2] < \infty$ parce que X et Y sont indépendants et du second ordre. Ainsi, le processus W est bien du second ordre. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mu_W(t) &= \mathbb{E}[X_t Y_t] = \mathbb{E}[X_t] \mathbb{E}[Y_t] = 0 \\ \gamma_W(t, t+h) &= \mathbb{E}[X_t Y_t X_{t+h} Y_{t+h}] = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] \mathbb{E}[Y_t Y_{t+h}] = \gamma_X(h) \gamma_Y(h), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que X et Y sont indépendants, stationnaires, et centrés. Notons qu'on utilise ici crucialement $\mathbb{E}[X_t X_{t+h} Y_t Y_{t+h}] = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] \mathbb{E}[Y_t Y_{t+h}]$, qui découle de l'indépendance de X et Y , mais pas de leur décorrélation.

5. La question 1 montre que la condition $|\rho| \leq 1$ est nécessaire. La question 2 montre que la condition $\rho = 1$ est suffisante. Si $|\rho| < 1$, alors on peut poser

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad W_t := \sqrt{1 - \rho^2} (A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k Z_{t-k} \right), \quad (2)$$

où les variables aléatoires $A, B, (Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de moyenne 0 et de variance 1. Les questions 2,3 et 4 garantissent que W est stationnaire et que

$$\gamma_W(h) = (1 - \rho^2) \times \cos(\theta h) \times \frac{\rho^{|h|}}{1 - \rho^2} = \gamma(h). \quad (3)$$

Lorsque $\rho = 1$, on a $\gamma(h) = \cos(\theta h)$, qui est bien une fonction d'auto-covariance d'après la question 2. Enfin, dans le cas $\rho = -1$, on a $\gamma(h) = (-1)^h \cos(\theta h)$, qui est la fonction d'auto-covariance du processus W défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad W_t := (A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)) (-1)^t, \quad (4)$$

où A et B sont des v.a.r. centrées, réduites et décorréliées.